ỨNG DỤNG GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH TÌM MA TRẬN NGHỊCH ĐẢO CỦA MA TRẬN VUÔNG CẤP BA

APPLICATION TO SOLVE SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS FIND INVERSE MATRIX OF THE SQUARE MATRIX OF THIRD DEGREE

ThS. Trần Quang Đăng
Khoa Khoa học Cơ bản – Trường ĐHXD Miền Tây
Email: tranquangdang@mtu.edu.vn
Điện thoại: 0909 531 321

Ngày nhận bài: 11/05/2023
Ngày gửi phản biện: 06/06/2023
Ngày chấp nhận đăng: 19/06/2023

Tóm tắt:

Bài viết này được thực hiện nhằm mục đích phân tích phương pháp giải và xây dựng phương pháp giải bài toán tìm ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp ba. Qua đó, tác giả xây dựng được phương pháp giải tìm ma trận nghịch đảo thông qua ứng dụng giải hệ phương trình tuyến tính. Điều này rất quan trọng giúp cho việc tìm ma trận nghịch đảo một cách đơn giản.

Từ khóa: *ma trận, ma trận nghịch đảo, hệ phương trình tuyến tính.*

Abstract:

This article is made for the purpose of analyzing the solution method and building a method to solve the problem of finding the inverse of a square matrix of the third degree. Thereby, the author built a method to find the inverse matrix through the application of solving a system of linear equations. This is very important to make finding the inverse matrix simple.

Keywords: *matrix, inverse matrix, system of linear equations.*

1. Đặt vấn đề

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp ba đã được nhiều tài liệu trình bày. Phương pháp áp dụng phép biến đổi sơ cấp và phương pháp ứng dụng định thức đã được nhiều tài liệu trình bày. Bài viết này nhằm giúp cho việc giải bài toán tìm ma trận nghịch đảo thuận lợi hơn, tác giả đã phân tích phương pháp giải và xây dựng được phương pháp giải tìm ma trận nghịch đảo bằng cách giải hệ phương trình tuyến tính, việc giải các hệ phương trình tuyến tính này được thực hiện bằng máy tính bỏ túi rất đơn giản. Từ đó, giải bài toán tìm ma trận nghịch đảo của ma trận vuông cấp ba một cách dễ dàng.

2. Nội dung

2.1. Xây dựng phương pháp tìm ma trận nghịch đảo từ định nghĩa

Ma trận A *khả nghịch* nếu tồn tại $D = (d_{ij})_{n\times n}$ sao cho $A.D = D.A = I_n$.

Khi đó ma trận D được gọi là *ma trận nghịch đảo* của ma trận A.

Kí hiệu: $A^{-1}A^{-1}$.

Theo định nghĩa ta có:

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n. \text{ [1]}$$

Cho ma trận $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ij}})_{3\times3}$ và A khả nghịch.

Giả sử ma trận

$$\mathrm{X} = (x_{ij})_{3\times3} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & xx_{33} \end{pmatrix}$$

sao cho: $\mathrm{A}.\mathrm{X} = \mathrm{I_3}$.

Xét phương trình: $\mathrm{A}.\mathrm{X} = \mathrm{I_3}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathrm{a_{11}} & \mathrm{a_{12}} & \mathrm{a_{13}} \\ \mathrm{a_{21}} & \mathrm{a_{22}} & \mathrm{a_{23}} \\ \mathrm{a_{31}} & \mathrm{a_{32}} & \mathrm{a_{33}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{a_{11}}x_{11} + \mathrm{a_{12}}x_{21} + \mathrm{a_{13}}x_{31} = 1 \\ \mathrm{a_{21}}x_{11} + \mathrm{a_{22}}x_{21} + \mathrm{a_{23}}x_{31} = 0 \\ \mathrm{a_{31}}{}_{x_{11}} + \mathrm{a_{32}}x_{21} + \mathrm{a_{33}}x_{31} = 0 \\ \mathrm{a_{11}}x_{12} + \mathrm{a_{12}}x_{22} + \mathrm{a_{13}}x_{32} = 0 \\ \mathrm{a_{21}}x_{12} + \mathrm{a_{22}}x_{22} + \mathrm{a_{23}}x_{32} = 1 \\ \mathrm{a_{31}}x_{12} + \mathrm{a_{32}}x_{22} + \mathrm{a_{33}}x_{32} = 0 \\ \mathrm{a_{11}}x_{13} + \mathrm{a_{12}}x_{23} + \mathrm{a_{13}}x_{33} = 0 \\ \mathrm{a_{21}}x_{13} + \mathrm{a_{22}}x_{23} + \mathrm{a_{23}}x_{33} = 0 \\ \mathrm{a_{31}}x_{13} + \mathrm{a_{32}}x_{23} + \mathrm{a_{33}}x_{33} = 1 \end{cases}$$

ISSN 2525-2615

Xét các hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} & + & a_{12}x_{21} & + & a_{13}x_{31} & = & 1 \\ a_{21}x_{11} & + & a_{22}x_{21} & + & a_{23}x_{31} & = & 0 \\ a_{31}x_{11} & + & a_{32}x_{21} & + & a_{33}x_{31} & = & 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{12} & + & a_{12}x_{22} & + & a_{13}x_{32} & = & 0 \\ a_{21}x_{12} & + & a_{22}x_{22} & + & a_{23}x_{32} & = & 1 \\ a_{31}x_{12} & + & a_{32}x_{22} & + & a_{33}x_{32} & = & 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{13} & + & a_{12}x_{23} & + & a_{13}x_{33} & = & 0 \\ a_{21}x_{13} & + & a_{22}x_{23} & + & a_{23}x_{33} & = & 0 \\ a_{31}x_{13} & + & a_{32}x_{23} & + & a_{33}x_{33} & = & 1 \end{cases} \quad (3)$$

Vì A khả nghịch nên $\det A \neq 0$. Suy ra, các hệ phương trình (1); (2); (3) có nghiệm duy nhất. Do đó, ma trận X là ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Tương tự, ma trận $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ sao cho: $X \,.\, A = I_3$.

Xét phương trình: $X \,.\, A = I_3$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_{11} & + & a_{21}x_{12} & + & a_{31}x_{13} & = & 1 \\ a_{12}x_{11} & + & a_{22}x_{12} & + & a_{32}x_{13} & = & 0 \\ a_{13}x_{11} & + & a_{23}x_{12} & + & a_{33}x_{13} & = & 0 \\ a_{11}x_{21} & + & a_{21}x_{22} & + & a_{31}x_{23} & = & 0 \\ a_{12}x_{21} & + & a_{22}x_{22} & + & a_{32}x_{23} & = & 1 \\ a_{13}x_{21} & + & a_{23}x_{22} & + & a_{33}x_{23} & = & 0 \\ a_{11}x_{31} & + & a_{21}x_{32} & + & a_{31}x_{33} & = & 0 \\ a_{12}x_{31} & + & a_{22}x_{32} & + & a_{32}x_{33} & = & 0 \\ a_{13}x_{31} & + & a_{23}x_{32} & + & a_{33}x_{33} & = & 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{12} + a_{31}x_{13} = 1 \\ a_{12}x_{11} + a_{22}x_{12} + a_{32}x_{13} = 0 \\ a_{13}x_{11} + a_{23}x_{12} + a_{33}x_{13} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a_{11}x_{21} + a_{21}x_{22} + a_{31}x_{23} = 0 \\ a_{12}x_{21} + a_{22}x_{22} + a_{32}x_{23} = 1 \\ a_{13}x_{21} + a_{23}x_{22} + a_{33}x_{23} = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a_{11}x_{31} + a_{21}x_{32} + a_{31}x_{33} = 0 \\ a_{12}x_{31} + a_{22}x_{32} + a_{32}x_{33} = 0 \\ a_{13}x_{31} + a_{23}x_{32} + a_{33}x_{33} = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Xét các hệ phương trình :

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{21}x_{12} + a_{31}x_{13} = 1 \\ a_{12}x_{11} + a_{22}x_{12} + a_{32}x_{13} = 0 \\ a_{13}x_{11} + a_{23}x_{12} + a_{33}x_{13} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{21} + a_{21}x_{22} + a_{31}x_{23} = 0 \\ a_{12}x_{21} + a_{22}x_{22} + a_{32}x_{23} = 1 \\ a_{13}x_{21} + a_{23}x_{22} + a_{33}x_{23} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_{31} + a_{21}x_{32} + a_{31}x_{33} = 0 \\ a_{12}x_{31} + a_{22}x_{32} + a_{32}x_{33} = 0 \\ a_{13}x_{31} + a_{23}x_{32} + a_{33}x_{33} = 1 \end{cases} \quad (6)$$

Vì A khả nghịch nên $\det A \neq 0$, suy ra $\det A^t \neq 0$. Suy ra, các hệ phương trình (4); (5); (6) có nghiệm duy nhất. Do đó, ma trận X là ma trận nghịch đảo của ma trận A.

2.2. Phương pháp giải

Bài toán: Cho ma trận $A = \left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$ và A khả nghịch. Tìm ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Phương pháp giải

ISSN 2525-2615

Cách 1 : Lập các ma trận

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right)$$

$$A_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right)$$

$$A_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{array}\right)$$

Giải các hệ phương trình với các ma trận mở rộng

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right)$$

⇨nghiệm là cột 1 của ma trận nghịch đảo.

$$A_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right)$$

⇨nghiệm là cột 2 của ma trận nghịch đảo.

$$A_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{array}\right)$$

⇨nghiệm là cột 3 của ma trận nghịch đảo.

Kết luận ma trận nghịch đảo của ma trận A.

Cách 2 : Lập các ma trận

$$A_4 = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{21} & a_{31} & 1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \end{array}\right)$$

$$A_5 = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 1 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \end{array}\right)$$

$$A_6 = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 1 \end{array}\right)$$

Giải các hệ phương trình với các ma trận mở rộng

$$A_4 = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{21} & a_{31} & 1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \end{array}\right)$$

⇨nghiệm là dòng 1 của ma trận nghịch đảo.

$$A_5 = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 1 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 0 \end{array}\right)$$

⇨nghiệm là dòng 2 của ma trận nghịch đảo.

$$A_6 = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{21} & a_{31} & 0 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & 0 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & 1 \end{array}\right)$$

⇨nghiệm là dòng 3 của ma trận nghịch đảo.

Kết luận ma trận nghịch đảo của ma trận A.

2.3. Ví dụ áp dụng

Ví dụ 1: Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 12 \\ 3 & 7 & 18 \end{pmatrix}$

Giải

Cách 1:

Ta có: $\det A = 1 \neq 0 \det A = 1 \neq 0$

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 12 & 0 \\ 3 & 7 & 18 & 0 \end{array}\right)$$

⇨nghiệm $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ là cột 1 của ma trận nghịch đảo.

$$A_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 12 & 1 \\ 3 & 7 & 18 & 0 \end{array}\right)$$

⇨nghiệm $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ là cột 2 của ma trận nghịch đảo.

$$A_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 12 & 0 \\ 3 & 7 & 18 & 1 \end{array}\right)$$

⇨nghiệm $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ là cột 3 của ma trận nghịch đảo.

Kết luận ma trận nghịch đảo cần tìm là:

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cách 2:

Ta có: $\det A^t = 1 \neq 0$

$$A_4 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 0 \\ 5 & 12 & 18 & 0 \end{array}\right)$$

⇨nghiệm $(6 \quad -1 \quad -1)$ là dòng 1 của ma trận nghịch đảo.

$$A_5 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \\ 5 & 12 & 18 & 0 \end{array}\right)$$

⇨nghiệm $(0 \quad 3 \quad -2)$ là dòng 2 của ma trận nghịch đảo.

$$A_6 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 7 & 0 \\ 5 & 12 & 18 & 1 \end{array}\right)$$

⇨nghiệm $(-1 \quad -1 \quad 1)$là dòng 3 của ma trận nghịch đảo.

Kết luận ma trận nghịch đảo cần tìm là:

$$\mathrm{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ví dụ 2: Tìm ma trận nghịch đảo (nếu có) của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Giải

Cách 1:

Ta có: $\det A = 2 \neq 0 \det A = 2 \neq 0$

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

ISSN 2525-2615

⇨nghiệm $\begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$ là cột 1 của ma trận nghịch đảo.

$$A_2 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

⇨nghiệm $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ là cột 2 của ma trận nghịch đảo.

$$A_3 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

⇨nghiệm $\begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ là cột 3 của ma trận nghịch đảo.

Kết luận ma trận nghịch đảo cần tìm là:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1,5 & 1 & -0,5 \\ -0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Cách 2:

Ta có: $\det A^t = 2 \neq 0$

$$A_4 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

⇨nghiệm $(-1 \quad -1 \quad 1)$ là dòng 1 của ma trận nghịch đảo.

$$A_5 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

⇨nghiệm $(1,5 \quad 1 \quad -0,5)$ là dòng 2 của ma trận nghịch đảo.

$$A_6 = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

⇨nghiệm $(-0,5 \quad 0 \quad 0,5\ )$là dòng 3 của ma trận nghịch đảo.

Kết luận ma trận nghịch đảo cần tìm là:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1,5 & 1 & -0,5 \\ -0,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$$

3. Kết luận

Qua nghiên cứu này, tác giả đã phân tích phương pháp giải và xây dựng được phương pháp giải tìm ma trận nghịch đảo bằng cách giải ba hệ phương trình tuyến tính. Việc giải các hệ phương trình này được thực hiện dễ dàng bằng máy tính bỏ túi. Do đó, việc tìm ma trận nghịch đảo của ma trận cấp 3 cũng đơn giản hơn.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Đình Trí, *Toán Cao Cấp – Tập 1*. Hà Nội: Nxb Giáo dục, 2004.

[2] Nguyễn Đình Trí, *Bài tập Toán Cao Cấp Cấp – Tập 1*. Hà Nội: Nxb Giáo dục, 2004.

[3] Bùi Xuân Hải, *Toán Cao Cấp: Đại số tuyến tính*. Hồ Chí Minh: Nxb Trường Đại học Khoa học Tự Nhiên Tp.HCM, 2000.